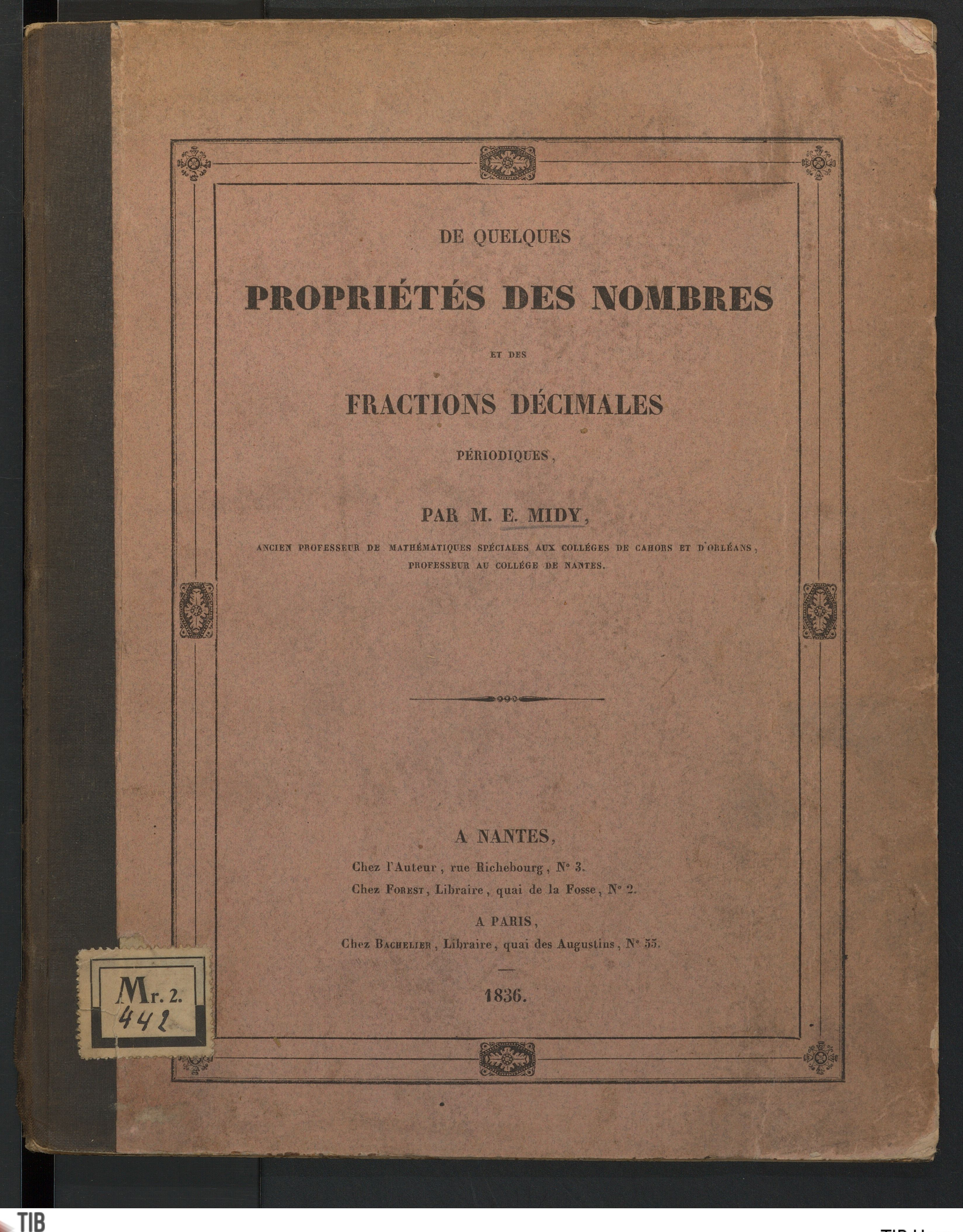


DE QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

ET DES

FRACTIONS DÉCIMALES

PÉRIODIQUES,

PAR M. E. MIDY,

ANCIEN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AUX COLLÉGES DE CAHORS ET D'ORLÉANS,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE NANTES.

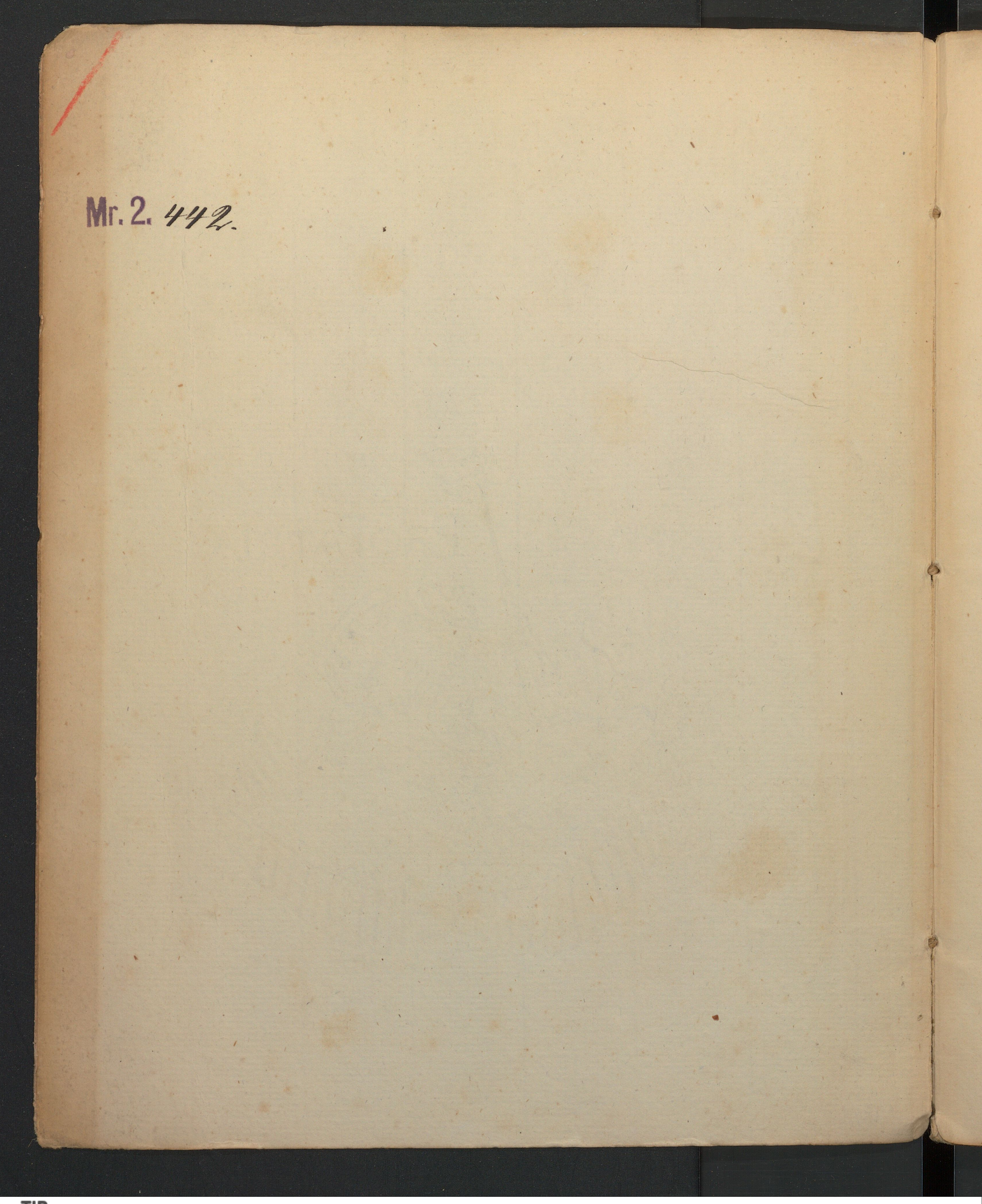
A NANTES,

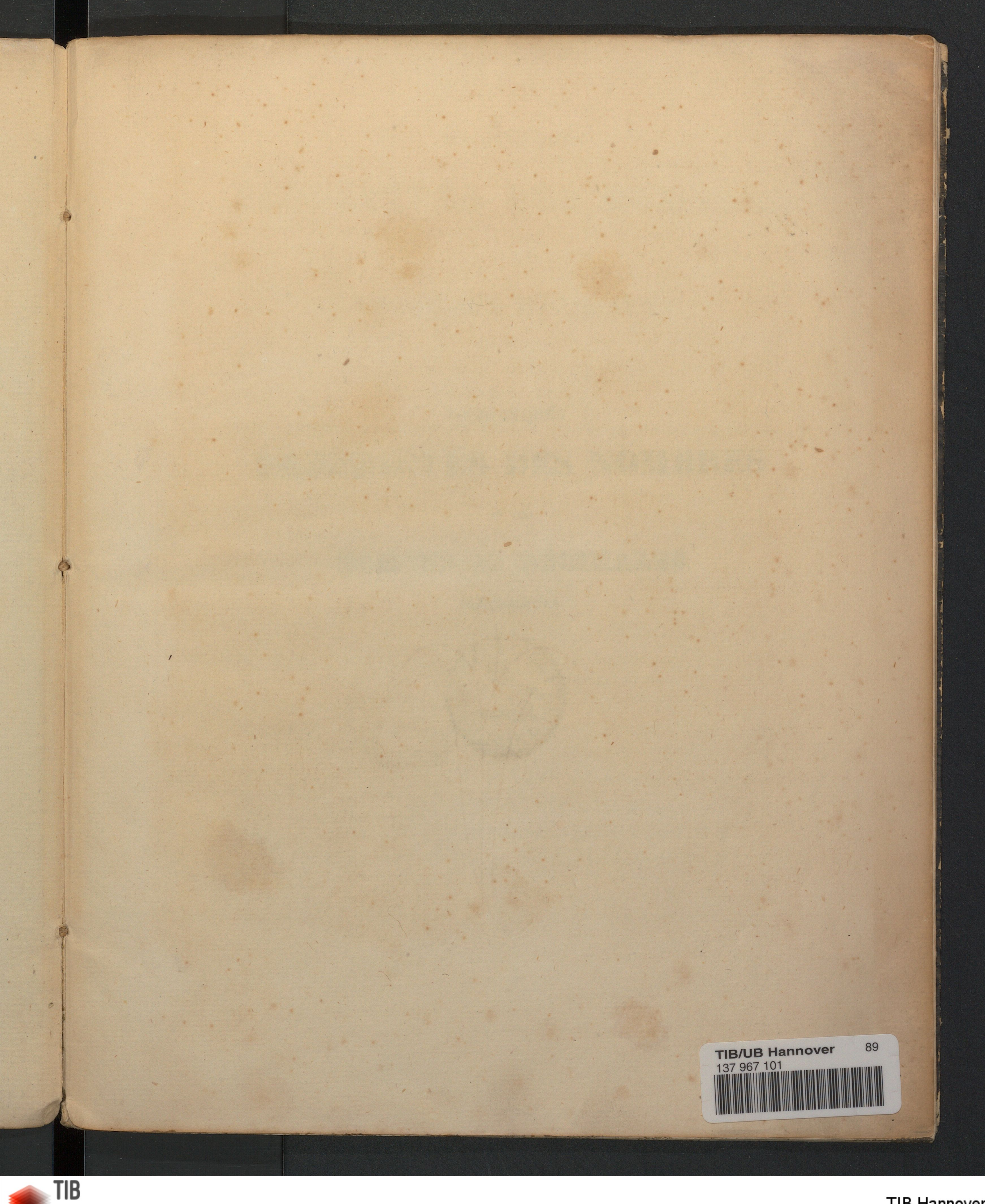
Chez l'Auteur, rue Richebourg, N° 3.
Chez Forest, Libraire, quai de la Fosse, N° 2.

A PARIS,

Chez Bachelier, Libraire, quai des Augustins, N° 55.

1836.





DE QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

ET DES

FRACTIONS DÉCIMALES

PÉRIODIQUES.



DE QUELQUES

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

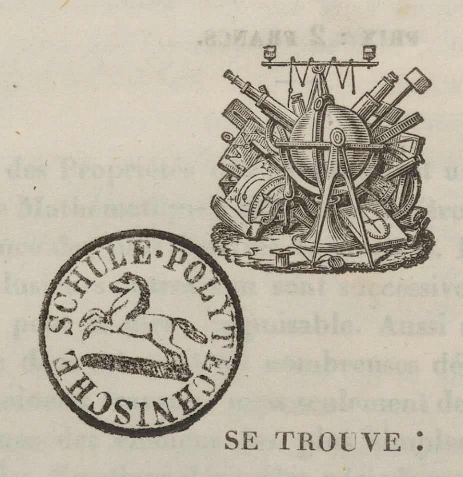
ET DES

FRACTIONS DÉCIMALES

PÉRIODIQUES,

PAR M. E. MIDY.

ANCIEN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AUX COLLÉGES DE CAHORS ET D'ORLÉANS,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE NANTES.



SE TROUVE :

A NANTES, { chez l'Auteur, rue Richebourg, N° 3.
chez Forest, Libraire, quai de la Fosse, N° 2. }

A PARIS, chez Bachelier, Libraire, quai des Augustins, N° 55.

1835.

NANTES, IMPRIMERIE DE FOREST.

PRIX : 2 FRANCS.



AVANT-PROPOS.

L'étude des Propriétés des Nombres est une des plus délicates de la science des Mathématiques. Elle a, en différens tems, exercé la sagacité et la patience des plus illustres Géomètres. Fermat, Euler, Legendre, Gauss et plusieurs autres s'en sont successivement occupés. La matière en est, on peut le dire, inépuisable. Aussi mon but n'est-il point de reproduire dans cet écrit les nombreuses découvertes de ces savans et leurs volumineux travaux; mais seulement de rassembler, de compléter quelques-uns des élémens les plus simples de cette théorie, et d'y rattacher les Fractions décimales périodiques.

Il m'a semblé que les recherches que j'offre aujourd'hui au public commençaient, en raison de leur étendue et par les développemens que je leur ai donnés, à sortir du cadre étroit d'un traité d'Algèbre élémentaire: qu'elles pouvaient dès-lors devenir le sujet d'un ouvrage distinct et séparé. C'est ce qui m'a décidé à les publier isolément.

Voué depuis de longues années à l'instruction de la jeunesse, c'est à elle surtout que mon travail est destiné, et c'est par le désir de lui être utile, en lui facilitant l'étude de théories compliquées, que je l'ai composé. Ce but m'imposait l'obligation d'être simple et lucide, plutôt que savant et abstrait. Il explique le soin que j'ai pris constamment d'éclaircir, par de nombreux exemples, les principes généraux que je voulais démontrer. En cela j'ai tâché d'imiter Euler, qui est en ce genre un modèle parfait. Quant aux savans, s'il en est qui lisent ce faible opuscule, un coup d'œuil rapide leur suffira pour reconnaître ce qu'il pourrait contenir de neuf ou d'intéressant.

On peut être neuf, ce me semble, dans les sciences comme dans les lettres, de deux manières différentes. La première, qui est sans contredit la plus difficile, mais aussi la plus rare, consiste à créer à la fois la matière et les idées, le sujet et l'expression. C'est là le premier mérite. La seconde, plus commode et plus facile, j'en conviens, c'est de reproduire un sujet connu sous une face nouvelle. Pour le faire avec succès, il faut, je crois, se dépouiller de ses souvenirs, chercher à oublier ce qu'on sait; considérer son sujet comme s'il était nouveau: l'étudier, le méditer long-tems en l'examinant sous tous les aspects. C'est ainsi qu'on s'en empare, qu'on se le rend propre et qu'on peut le traiter et le développer ensuite avec ensemble, précision et clarté. C'est le seul moyen d'être encore original en venant après les autres, et d'éviter l'inconvénient si grave de n'être en écrivant que le pâle reflet des pensées d'autrui.

Ces idées sont celles que je me suis efforcé de mettre en pratique dans ce court essai. Ainsi, m'appuyant sur le théorême si connu de Fermat, j'ai cherché, en méditant ce principe, à en développer les nombreuses conséquences. Dans une matière si souvent traitée, j'ai dû me rencontrer souvent sans doute, pour les résultats, avec beaucoup d'auteurs, soit anciens, soit récents. Mais j'affirme que c'est à mon insçu : c'est-à-dire, sans les consulter, sans les copier, et uniquement parce que la nature de mon travail a du me conduire aux mêmes résultats qu'eux. Quant au mérite relatif de leurs recherches et des

miennes, ce n'est pas à moi d'en parler ni d'en prononcer. Je me suis livré avec quelque plaisir à ce travail qui me souriait. J'ai pensé qu'il pouvait y avoir quelque utilité à le publier. Je l'ai fait : c'est au public à décider si j'ai eu tort, ou raison.

Une circonstance de l'époque actuelle sur laquelle je ne crois pas déplacé de m'arrêter ici un instant, est celle-ci : je veux parler de l'activité extraordinaire qui se fait voir aujourd'hui dans les esprits, non-seulement à Paris, mais dans les provinces. La presse politique a donné l'exemple ; la presse littéraire, piquée d'une noble émulation, commence à l'imiter. Plusieurs ouvrages de mérite, tant dans les sciences que dans les lettres, ont été récemment publiés dans nos départemens. Que l'on continue ces utiles travaux dont le pays se réjouit et dont il peut tirer, je pense, de grands avantages !

Paris où se trouve réunie l'élite de nos littérateurs et de nos savans ne doit pas s'en alarmer : il restera, sans aucun doute, à la tête de la civilisation de notre pays. Mais celle-ci n'y sera plus entièrement confinée. Elle se répandra au dehors. Des foyers nombreux de lumière s'établiront bientôt ailleurs, et l'on perdra peu à peu cette habitude, encore si commune aujourd'hui, de ne voir la France que dans sa capitale. Eh ! qui sait s'il n'y a pas en ce moment même, à côté de nous, perdus dans la foule, quelques hommes de talent, de génie peut-être, dont le mérite encore ignoré n'attend que cette circonstance favorable pour briller d'un éclat soudain et accroître encore au loin la gloire de notre belle et illustre patrie.

Qu'il me soit permis, en attendant cette époque heureuse, d'offrir à la jeunesse studieuse et instruite de nos écoles ce faible tribut de mes travaux ! S'il était accueilli par elle avec quelque faveur, ce succès m'enhardirait peut-être à faire paraître prochainement d'autres ouvrages plus importans, et déjà pour la plupart terminés.

DE QUELQUES

PROPRIÉTES DES NOMBRES

ET DES

FRACTIONS DÉCIMALES

PÉRIODIQUES.

On sait que les Nombres jouissent d'une foule de propriétés intéressantes qui ont été, en différens tems et à diverses reprises, le but des recherches de mathématiciens célèbres; je me suis proposé, dans ce qui suit, d'examiner et d'étendre quelques-unes de ces propriétés plus qu'on ne l'a fait, je pense, jusqu'ici.

Soit p un nombre premier avec a, et concevons que l'on ait divisé tous les produits a, $2a$, $3a$, ... $(p-1)a$ par p. Je dis que tous les restes seront différens.

En effet, supposons que deux de ces produits na, $n'a$ aient donné le même reste r. Désignant les quotiens entiers par E, E', l'on aura

$$na = Ep + r. \quad (1).$$
$$n'a = E'p + r. \quad (2).$$

En soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, il viendra

$$na - n'a = Ep - E'p.$$

ou

$$(n - n')a = (E - E')p.$$

par suite

$$\frac{(n-n')a}{p} = E - E'.$$

Le second nombre étant entier, le premier devrait l'être.

Mais p est premier avec a. De plus, il est plus grand que chacun des deux nombres n et n', et par conséquent il ne peut diviser leur différence. Dailleurs cette différence n'est pas nulle, puisque n et n' sont inégaux. Donc p ne peut diviser le produit $(n - n')a$. Donc le principe est démontré.

Soit considéré le produit

$$a \times 2a \times 3a \ldots \times (p-1)\,a.$$

Supposons que p soit un nombre premier absolu qui ne divise point a, et concevons que l'on ait divisé tous les facteurs successifs par p. Alors tous les restes, comme on l'a démontré précédemment, seront différens entre eux. De plus, puisque leur nombre est égal à $p-1$, ils doivent être les $p-1$ premiers nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, etc.; on aura donc l'équation

$$a \times 2a \times 3a \ldots \times (p-1)\,a = \mathrm{E}p + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1).$$

ou celle-ci

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)\,a^{p-1} = \mathrm{E}p + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1).$$

Donc

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)\,(a^{p-1}-1) = \mathrm{E}p.$$

Donc p doit diviser le premier membre de cette équation; et puisqu'il est premier avec tous les facteurs du produit 1, 2, 3 ... $(p-1)$ et par suite avec ce produit lui-même, il doit diviser $a^{p-1}-1$.

Supposons qu'un nombre donné soit premier avec un second nombre: on sait qu'il est premier alors avec toutes les puissances de ce second nombre. Si nous concevons qu'on ait divisé par le premier nombre toutes les puissances successives du second, aucune division ne pourra s'effectuer exactement. De plus, le nombre des restes distincts sera nécessairement limité, puisque chacun d'eux est plus petit que le diviseur.

Proposons-nous de trouver quels sont ces restes, et dans quel ordre ils se reproduiront.

Mais avant de nous livrer à cette recherche, démontrons le principe suivant, qui nous sera souvent utile dans la suite.

Soient a et b deux nombres; q et q' les quotiens que l'on obtient en les divisant par un autre nombre d; soient enfin r et r' les restes de ces divisions, nous aurons les relations

$$a = dq + r. \qquad (1).$$
$$b = dq' + r'. \qquad (2).$$

En multipliant ces deux équations entre elles, il viendra

$$ab = ddqq' + dq'r + dqr' + rr'.$$

Ou pour abréger

$$ab = \mathrm{M}d + rr'. \qquad (3).$$

Or $\mathrm{M}d$ étant divisible par d, l'on voit que pour obtenir le reste de la division de ab par d, il suffira de chercher celui de la division de rr' par ce même nombre.

Revenons maintenant à la question que nous nous étions proposé de résoudre. Pour plus de clarté examinons d'abord un cas particulier, et cherchons les différens restes qu'on obtiendrait en divisant les puissances successives du nombre 5, je suppose, par le nombre premier 13; nous aurons ces résultats :

Puissances	$(5)^0$,	$(5)^1$,	$(5)^2$,	$(5)^3$,	$(5)^4$,	$(5)^5$,	etc.
Restes	1,	5,	12,	8,	1,	5.	etc.

D'abord évidemment le premier reste est 1 et le second 5; le troisième se trouvera en multipliant le second 5 par 5, et en divisant le produit 25 par 13, ce qui donne le reste 12. Le reste suivant s'obtiendra en multipliant 12 par 5 et en divisant le produit 60 par 13, ce qui donne le reste 8. Celui-ci multiplié par 5 et divisé de même par 13, donnera le reste 1, qui est celui donné par la première division. Il faudra donc recommencer sur les mêmes nombres la même série d'opérations qui ont eu lieu précédemment. Les mêmes restes 1, 5, 12, 8, se reproduiront donc perpétuellement dans le même ordre où ils ont été d'abord obtenus.

Pour plus de généralité, p étant premier avec a, supposons que dans la suite indéfinie a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, etc., les deux termes a^n et $a^{n'}$, divisés par p, aient donné le même reste; alors on aura l'équation

$$a^{n'} - a^n = Ep.$$

Ou celle-ci

$$a^n \left(a^{n'-n} - 1 \right) = Ep.$$

Dans laquelle E désigne un nombre entier. Donc p doit diviser $a^n \left(a^{n'-n} - 1 \right)$.

Or il est premier avec a^n. Donc il divise $a^{n'-n}-1$. Mais $n'-n < n'$. Donc si a^n et $a^{n'}$ ont donné le même reste, c'est qu'une puissance $a^{n'-n}$, antérieure à $a^{n'}$, a déjà donné le reste 1, ou le même reste que a^0. Ainsi les restes successifs seront tous différens jusques au reste 1. Mais ces restes sont au plus en nombre $p-1$, puisque le diviseur est p. Concluons de là encore que si depuis a jusqu'à a^{p-2} aucun reste ne s'est trouvé égal à 1, le reste suivant est alors 1, ou que $a^{p-1}-1$ est divisible par p.

Démontrons maintenant que ces restes sont toujours périodiques. Parmi les puissances successives de a, soit a^n la première qui ait donné le reste 1. Nommons ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc., les restes antérieurs, nous aurons ces deux suites :

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ a^{n-1},\ a^n.$$

$$1,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_{n-1},\ 1.$$

a^n donnant le reste 1, il faut en conclure que toute puissance entière de a^n, ou que $(a^n)^m$, égal à $(a)^{nm}$, donnera toujours le reste 1.

Donc, si on multiplie tous les nombres de la première suite par a^{nm}, les termes de la seconde ne changeront pas, et l'on aura encore les deux suites correspondantes de puissances et de restes :

$$a^{nm},\ a^{nm+1},\ a^{nm+2},\ a^{nm+3},\ \ldots\ a^{nm+n-1},\ a^{nm+n}.$$

$$1,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots\ \beta_{n-1},\ 1.$$

Ainsi a^n étant la première puissance de a, autre que a^o, qui donne le reste 1, il s'ensuit que l'exposant d'une puissance quelconque de a peut être augmenté ou diminué d'un multiple quelconque de n, sans que le reste change.

Il suit encore de là que les puissances de a^n sont les seules qui donnent le reste 1 ; et puisque il a été démontré que, lorsque p est premier, la puissance a^{p-1} donne le reste 1, l'exposant de toute puissance inférieure qui donnerait le même reste 1, ne peut être qu'un diviseur exact de $p-1$. Donc si, après avoir calculé les restes des puissances correspondantes à ces diviseurs, on n'en a trouvé aucun égal à l'unité, on devra en conclure que a^{p-1} est la plus faible puissance de a qui, diminuée d'une unité, sera divisible par le nombre premier p.

Eclaircissons ces préceptes par quelques applications numériques; et afin de les rendre plus aisées et plus promptes, établissons le principe suivant pour la division des nombres.

Supposons, par exemple, qu'on ait à déterminer le reste de la division du nombre 32 par le nombre 7. Ce nombre 32 tombe entre ces deux multiples consécutifs de 7 : savoir, 28 égal à 4×7 et 35 égal à 5×7 ; et l'on aura les deux équations

$$32 = 4 \times 7 + 4. \qquad (1).$$

$$32 = 5 \times 7 - 3. \qquad (2).$$

De sorte que, selon que l'on prendra le quotient approché à moins d'une unité en moins, ou en plus, le reste de la Division sera $+4$, ou -3 ; c'est-à-dire, positif dans le premier cas et négatif dans le second. De plus, comme les deux restes réunis constituent la différence qui existe entre deux multiples consécutifs du diviseur, leur somme est toujours égale à ce diviseur, et chacun d'eux est la différence entre ce diviseur et l'autre reste. Or, il y a des recherches numériques dans lesquelles on abrège beaucoup les calculs en substituant ces restes négatifs aux restes positifs correspondans. On en aura la preuve dans la question suivante.

Proposons-nous, par exemple, de trouver quelle est la plus faible puissance de 10 qui divisée par 43 donne le reste 1.

$43 - 1 = 42$. Or, les diviseurs de 42 sont 2, 3, 6, 7, 14, 21.

Les puissances de 10 qui ont ces nombres pour exposans sont donc les seules qui, divisées par 43, peuvent donner le reste 1. Cherchons donc ces restes. Ils formeront avec ces puissances le tableau suivant :

Puissances	$(10)^0$,	$(10)^1$,	$(10)^2$,	$(10)^3$,	$(10)^6$,	$(10)^7$,	$(10)^{14}$,	$(10)^{21}$.
Restes	1,	10,	14,	11,	-8,	$+6$,	-7,	$+1$.

Voici comment on peut le former. Après avoir trouvé par la méthode ordinaire les restes 1, 10, 14, 11, qui correspondent aux 4 premières puissances de 10, je remarquerai que $(10)^6$ est le carré de 10^3 dont le reste est 11. Alors, comme le carré de 11 est 121, et que -8 est le plus petit des deux restes de la division de 121 par 43, je multiplierai ce reste -8 par le reste 10 de la puissance $(10)^1$. Le produit est -80. En le divisant par 43, le plus petit reste est $+6$. C'est donc celui qui correspond à $(10)^7$. Mais $(10)^{14}$ est le carré de 10^7. Faisons le carré de 6 qui est 36. Le reste sera -7. Puis comme $(10)^{14} \times (10)^7 = (10)^{21}$, faisons le produit de $+6$ par -7. Ce produit est -42, dont le reste est $+1$. Concluons de là que $(10)^{21}$ est la plus petite puissance de 10 qui, divisée par ce même nombre 43, donnera le reste 1.

Cherchons encore quelle est la plus petite puissance de 12 qui, divisée par le même nombre 43, donnerait le reste 1. Nous formerons par la même méthode le tableau suivant :

Puissances	$(12)^0$,	$(12)^1$,	$(12)^2$,	$(12)^3$,	$(12)^6$,	$(12)^7$,	$(12)^{14}$,	$(12)^{21}$,	$(12)^{42}$.
Restes	1 ,	12 ,	15 ,	8 ,	21 ,	-6 ,	-7 ,	-1 ,	$+1$.

On voit que la 42e puissance de 12 est la première qui amène le reste 1. On exprime cette propriété, en disant que 12 est une *racine primitive* de 43. On voit par cet exemple quelle est la méthode à suivre pour reconnaître promptement les racines primitives d'un nombre premier.

Nous allons dans ce qui suit étendre les recherches précédentes au cas où le diviseur, toujours premier avec a, au lieu d'être un nombre premier absolu, serait un nombre quelconque. Et nous considérerons d'abord le cas où le diviseur serait une puissance donnée p^n d'un nombre premier p.

Soit a^n la plus petite puissance de a qui, divisée par p, donne le reste 1. Supposons que la différence $a - 1$ ne soit divisible qu'une seule fois par p. Cherchons quelle peut être la plus petite de celles qui divisées par p^2 donneront encore ce reste 1. Puisque

cette puissance diminuée de 1 doit donner un reste divisible par p^2, ce même reste doit être à plus forte raison divisible par p. Donc la puissance cherchée de a ne peut être qu'une puissance de a^n. Or, je dis d'abord qu'elle ne peut être inférieure à $(a^n)^p$. En effet, supposons pour un instant que k étant plus petit que p, la puissance $(a^n)^k$, diminuée de 1, puisse néanmoins être divisible par p^2. Faisons $a^n = A + 1$. Nous aurons par la loi connue du binôme

$$(A+1)^k = A^k + k.\, A^{k-1} \ldots\ldots + \frac{k.(k-1)}{1\,.\,2} A^2 + k.\, A + 1.$$

Or, la somme $A^k + k.\, A^{k-1} \ldots\ldots + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2} A^2$ est divisible par A^2 et peut être représentée par $M\, A^2$.

$$\text{Donc } \frac{(A+1)^k - 1}{p^2} = M \frac{A^2}{p^2} + \frac{k.\, A}{p^2}$$

Puisque p divise A, la première partie du second membre $M \frac{A^2}{p^2}$ est entière. Mais la seconde partie $\frac{k.\, A}{p^2}$ ne l'est pas, puisque A n'est divisible qu'une seule fois par p, et que p d'ailleurs est plus grand que k. Donc aussi $(A+1)^k - 1$ ne saurait se diviser par p^2.

Mais par la même loi de binôme,

$$(A+1)^p - 1 = A^p + p\,A^{p-1} \ldots + \frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} A^2 + p\,A.$$

Or, le second membre est évidemment divisible par p^2. Donc le premier l'est aussi; mais il ne l'est point par p^3, car tous les termes du second membre jusqu'au terme $\frac{p\,(p-1)}{1\,.\,2} A^2$ inclusivement, sont divisibles par p^3, tandis que le dernier terme p A ne l'est pas. Donc $(a^n)^p$ sera la plus petite puissance de a qui, diminuée de 1, donnera un reste divisible par p^2, et ce reste ne sera point divisible par p^3. On prouvera de même que $(a^{np})^p$ sera la première puissance de a qui, divisée par p^3, donnera le reste 1, et que la différence $a^{np^2} - 1$ ne sera pas divisible plus de trois fois par p, et ainsi de suite.

De sorte qu'en généralisant cette proposition, on peut dire que si A n'est divisible qu'une seule fois par p, $(a^n)^{p^h}$ sera la première puissance de a qui, divisée par p^{h+1}, donnera le reste 1, et que la différence $(a^n)^{p^h} - 1$ ne sera divisible que $h+1$ fois par p.

Si A, ou la différence $a^n - 1$, était divisible plusieurs fois par p, 3 fois par exemple, alors on prouverait de même que $(a^n)^p - 1$ serait divisible 4 fois de suite et seulement 4 fois par p; que $(a^{pn})^p - 1$ le serait 5 fois, et ainsi de suite.

Ainsi le nombre $(10)^1 - 1$, égal à 9, étant divisible par 3^2, il faut en conclure que $(10)^3$ sera la première puissance de 10 qui, divisée par $(3)^3$ ou 27, donnera le reste 1, et que la différence $(10)^3 - 1$ ne sera divisible que 3 fois par 3; que $(10)^9$ sera la première puissance de 10 qui, divisée par 3^4 ou 81, donnera le reste 1, et que la différence $(10)^9 - 1$ ne sera divisible que 4 fois par 3; enfin, que $(10)^{27}$ sera la première puissance de 10 qui, divisée par $(3)^5$ ou 243, donnera le reste 1, et que $(10)^{27} - 1$ ne sera divisible que 5 fois par 3, et ainsi de suite.

Supposons actuellement que p ne soit ni un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier. Il est alors décomposable en facteurs premiers; et, pour commencer par un exemple simple, soit à trouver d'abord la plus petite puissance de 8 qui, divisée par 351, donne le reste 1. Ce nombre 351 équivaut à $(3)^3 \times 13$. Or la seconde puissance de 8 est la première qui divisée par 3 donne le reste 1. Mais $8^2 - 1$, divisé par 3, donne 21 qui est encore divisible une seule fois par 3. Il faut donc en conclure que $(8^2)^3$, ou 8^6, est la plus petite puissance de 8 qui, divisée par 27, donne le reste 1 et de plus que $\frac{(8)^6 - 1}{27}$ n'est plus divisible par 3. De plus, il est facile de s'assurer que $(8)^4$ est la plus petite puissance de 8 qui, divisée par 13, donne le reste 1. La puissance cherchée de 8, diminuée de 1, devant donner un reste divisible par 351, il faut que ce reste se divise exactement par 27 et par 13. Mais pour que la première condition soit remplie, il faut, comme nous l'avons démontré, que cette puissance de 8 soit une puissance de $(8)^6$; il faut en même-temps pour que la seconde condition soit remplie, qu'elle soit une puissance de $(8)^4$: et comme 12 est le multiple le plus simple possible des deux exposans 6 et 4, tirons-en cette conséquence que $(8)^{12}$ sera la première puissance de 8 qui jouira de la propriété demandée, et que celles qui en jouiront encore après elle, seront les seules puissances successives de $(8)^{12}$.

Proposons-nous encore pour second exemple de trouver qu'elle serait la plus petite puissance de 10 qui diminuée de 1 serait divisible par 1519.

Ce nombre est la même chose que 31×7^2. Or, 10^{15} est la plus petite puissance de 10 qui, divisée par 31, donne le reste 1, et la différence $10^{15} - 1$ n'est divisible qu'une seule fois par 31. Puis 10^6 est la première puissance de 10 qui, divisée par 7, donne le reste 1. D'ailleurs $10^6 - 1$ n'est divisible qu'une fois par 7. Donc $10^{6 \cdot 7}$, ou 10^{42}, sera la première puissance de 10 qui, divisée par 7^2, ou 49, donnera le reste 1. Et de plus la différence $10^{42} - 1$ ne sera divisible que 2 fois par 7. Il suit de là que la puissance cherchée de 10 devra être à la fois une puissance de 10^{15} et de 10^{42} : et comme le plus petit multiple possible des deux exposans 15 et 42 est 210, il s'ensuit que 10^{210} sera la plus petite puissance de 10 qui, diminuée de 1, sera divisible par 1519,

et qu'après cette division, le quotient obtenu ne sera plus divisible par 7, ni par 31.

Enfin, si p est décomposable en facteurs q^h, $q'^{h'}$, $q''^{h''}$ ... tels que q', q'', q'''... soient des nombres premiers différens; de manière que l'on ait $p = q^h\, q'^{h'}\, q''^{h''}$ ... Alors, si a^n, $a^{n'}$, $a^{n''}$ ... sont les plus petites puissances de a qui, diminuées de 1, donnent des restes divisibles respectivement par q^h, $q'^{h'}$, $q''^{h''}$ ... Si de plus, ces divisions faites, les quotiens ne sont plus divisibles par q, q', q'' ..., et qu'en même-temps t soit le plus petit multiple possible des exposans n, n', n'' ...; il faudra conclure de ce qui précède que a^t sera la plus petite puissance de a qui, divisée par p, donnera le reste 1, et que la différence $a^t - 1$ sera divisible seulement h fois par q; h' fois par q'; h'' fois par q'', et ainsi de suite.

Pour peu que l'on ait réfléchi sur la nature des fractions décimales périodiques et des fractions ordinaires qui les produisent, on voit de suite qu'elles sont liées intimement aux principes qui viennent d'être développés. Ceux-ci en effet vont nous mettre en état d'expliquer et de démontrer quelques propriétés assez remarquables de ces sortes de fractions.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction plus petite que l'unité et irréductible. Alors l'on a $a < b$ et les deux termes a et b sont premiers entr'eux. L'opération par laquelle on convertit cette fraction en décimales, équivaut à multiplier a par une puissance de 10 du degré marqué par le nombre de chiffres décimaux que l'on veut obtenir au quotient et à diviser le produit par b. Le quotient peut être désigné par $\frac{a \times 10^n}{b}$ Or, b est premier avec a. Donc, pour qu'une pareille expression soit entière, il faut que b divise 10^n; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que b sera une puissance de 2, ou une puissance de 5, ou enfin le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5. Toutes les fois que b ne satisfera pas à l'une de ces conditions, aucune division partielle ne pourra se faire exactement. Dans ce dernier cas, les restes successifs seront les mêmes que ceux qu'on obtiendrait en divisant par b les produits

$$a \times 10^1, \quad a \times 10^2, \quad a \times 10^3, \quad \ldots \quad \text{(A)}.$$

Supposons d'abord b premier avec 10.

Nommons r, r_1, r_2, r_3, etc., les restes qu'on obtiendrait en divisant par b les puissances successives de 10.

En les multipliant tous par a, les produits

$$ar_1, \quad ar_2, \quad ar_3, \quad \text{etc.}, \quad \ldots \quad \text{(B)}.$$

Divisés par b seront les restes cherchés.

Soit 10^n la plus petite puissance de 10 qui, diminuée de 1, soit divisible par b. b étant premier avec 10, nous avons démontré plus haut qu'en divisant par ce nombre toutes les puissances de 10 jusqu'à 10^n, tous les restes étaient différens ; que le dernier était 1 et que, passé ce terme, ils se reproduisaient tous constamment dans le même ordre : ou qu'ils étaient périodiques.

Désignons-les par

$$\beta_1, \; \beta_2, \; \beta_3 \; \ldots \; \beta_{n-1}, \; 1, \beta_1, \; \beta_2, \; \beta_3 \; \ldots \; \beta_{n-1}, \; 1, \text{ etc.}$$

Alors la série désignée précédemment par (B) devient

$$a\beta_1, \; a\beta_2, \; a\beta_3 \; \ldots \; a\beta_{n-1}, \; a, \; a\beta_1, \; a\beta_2, \; a\beta_3 \; \ldots \; a\beta_{n-1}, \; a, \text{ etc.} \qquad \text{(C)}$$

Or les restes $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$, étant différens, tous plus petits que b, et b d'ailleurs étant premier avec a, nous avons prouvé précédemment que les produits $a\beta_1$, $a\beta_2$ ... $a\beta_{n-1}$, divisés par b, donnaient des restes différens. La série (C) montre de plus qu'ils doivent ensuite être périodiques. Les chiffres du quotient le seront donc également à partir du premier chiffre décimal, et l'on voit de plus que le nombre des chiffres de chaque période sera toujours égal à l'exposant de la plus petite puissance de 10 qui, diminuée de 1, sera divisible par b. La fraction décimale trouvée sera une *fraction périodique simple.*

Supposons actuellement que b ait des facteurs communs avec 10^n et soit $2^g\,5^h$ le plus grand diviseur commun de ces deux nombres. De plus soit b' le quotient qu'on obtient en divisant 10^n par $2^g\,5^h$. Alors b' sera premier avec 10, et l'on aura $b = 2^g\,5^h\,b'$. Supposons ici $h > g$ et la suite

$$\frac{a \times 10}{b}, \; \frac{a \times 10^2}{b}, \; \frac{a \times 10^3}{b}, \text{ etc.}$$

Pourra être représentée comme il suit :

$$\frac{a \times 10}{2^g\,5^h\,b'}, \; \frac{a \times 10^2}{2^g\,5^h\,b'}, \; \frac{a \times 10^3}{2^g\,5^h.\,b'}, \; \ldots \; \frac{a \times 10^h}{2^g\,5^h\,b'}, \; \frac{a \times 10^{h+1}}{2^g\,5^h\,b'} \; \ldots \; \frac{a \times 10^{h+m}}{2^g\,5^h\,b'}, \text{ etc.}$$

Concevons cette suite décomposée en deux : la première se terminant au terme $\frac{a \times 10^h}{2^g\,5^h.\,b'}$, et la seconde commençant au terme suivant $\frac{a \cdot 10^{h+1}}{2^g\,5^h.\,b'}$. Je vais démontrer qu'un terme quelconque de la seconde suite, $\frac{a \times 10^{h+m}}{2^h\,5^g\,b'}$ par exemple, ne saurait donner le même reste qu'a déjà donné un autre terme $\frac{a \times 10^k}{2^h\,5^g\,b'}$ de la première. Car, si cela avait lieu, l'on aurait en prenant la différence des deux termes, l'équation

$$a \times 10^{h+m} - a \times 10^{k} = 2^{g}\, 5^{h} \times b' \times \mathrm{E}.$$

dans laquelle le facteur E désigne un nombre entier, et par suite celle-ci :

$$a\, 10^{k}\, (10^{h+m-k} - 1) = 2^{g}\, 5^{h}\, b' \times \mathrm{E}.$$

Or 5^{h} divise le second membre de cette dernière équation et devrait alors diviser le premier. Mais évidemment il ne divise pas le facteur $10^{h+m-k} - 1$. D'ailleurs il est premier avec a. De plus il ne divise pas 10^{k}, puisque $h > k$. Donc le principe est démontré. On prouverait absolument de même que deux termes de la première suite ne peuvent pas donner le même reste. Mais d'ailleurs, à partir du terme $\frac{a \times 10^{h+1}}{2^{g}\, 5^{h}\, b'}$, la suite peut se mettre sous cette forme :

$$\frac{a \cdot 2^{h-g} \times 10}{b'},\ \frac{a \cdot 2^{h-g} \times 10^{2}}{b'},\ \frac{a \cdot 2^{h-g} \times 10^{3}}{b'},\ \text{etc.}$$

Ou bien, en appelant a' la quantité $a \times 2^{h-g}$, sous celle-ci :

$$\frac{a' \times 10}{b'},\ \frac{a' \times 10^{2}}{b'},\ \frac{a' \times 10^{3}}{b'},\ \text{etc.}$$

Mais puisque b', premier avec a', l'est aussi avec 10, cette dernière suite rentre dans le cas primitif et donne lieu à des restes périodiques. Ainsi tous les restes seront différens jusqu'à celui dont le rang est marqué par h. Passé ce terme, ils deviennent périodiques et différens des précédens. La fraction décimale, correspondante à $\frac{a}{b}$, ne deviendra donc dans ce cas périodique qu'à partir du $h + 1^{e}$ chiffre, ou elle sera *périodique mixte*. Et l'on voit que le nombre des chiffres décimaux antérieurs à la première période sera toujours égal au plus grand des exposans des puissances de 2 et de 5 qui se trouveront comme facteurs dans b.

Maintenant soit n le nombre des opérations qu'il a fallu faire dans l'un et l'autre cas pour trouver un reste égal à l'un des restes obtenus précédemment. Nommons a_1, a_2, a_3, etc, la suite de ces restes et q, q_1, q_2, etc., les quotiens qui leur correspondent. La série des opérations sera représentée par cette suite d'équations :

$$\begin{aligned}
10\, a &= bq + a_1 \\
10\, a_1 &= bq_1 + a_2 \\
10\, a_2 &= bq_2 + a_3 \\
10\, a_3 &= bq_3 + a_4 \qquad\qquad (\mathrm{A}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10\, a_{n-1} &= bq_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Si b est premier avec 10, ou si la fraction périodique est simple, l'on aura $a_n = a$. Dans ce cas multiplions respectivement par 10^{n-1}, 10^{n-2}, 10^{n-3} ... 10^1 et 1 ces n équations, ajoutons les résultats et supprimons les termes communs aux deux membres : il viendra

$$10^n a = b(10^{n-1}q + 10^{n-2}q_1 + 10^{n-3}q_2 + 10^{n-4}q_3 \,..\, 10^2 q_{n-3} + 10\, q_{n-2} + q_{n-1}) + a \,..\, \quad (B)$$

Faisons passer a dans le premier membre. Remarquons que le polynôme écrit entre parenthèses est la valeur absolue de la période. Nommons le P, et nous aurons

$$(10^n - 1)\, a = b \times P.$$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{P}{10^n - 1}$, ce qui est le principe connu.

Supposons maintenant que b ne soit plus premier avec 10 et que 10^h soit la première puissance de 10 avec laquelle il ait le plus grand diviseur commun possible. Alors $a_n = a_h$ et l'équation trouvée (B) devient

$$10^n a = b(10^{n-1}q + 10^{n-2}q_1 + 10^{n-3}q_2 \ \ldots + 10^2 q_{n-3} + 10 \,.\, q_{n-2} + q_{n-1}) + a_h. \quad (C)$$

Multiplions respectivement par 10^{h-1}, 10^{h-2} ... 10^1 et 1 les h premières équations (A). Ajoutons les résultats et nous aurons après les réductions

$$10^h a = b\,(10^{h-1}q + 10^{h-2}q_1 + 10^{h-3}q_2 \ \ldots + 10^2 q_{h-3} + 10\, q_{h-2} + q_{h-1}) + a_h. \quad (D)$$

Retranchons l'équation (B) de l'équation (C) et nous aurons

$$10^h(10^{n-h} - 1)\, a = b \times \{ (10^{n-1}q + \ \ldots + q_{n-1}) - (10^{h-1}q + \ \ldots + q_{h-1}) \} \quad (E)$$

Or des deux polynômes dont la différence multiplie b dans le second membre de l'équation (E), il est facile de reconnaître que le premier est la valeur absolue du nombre qui dans le quotient périodique mixte est formé des chiffres antépériodiques et de ceux de la première période, et que le second est la valeur absolue du nombre qui précède cette première période. Désignons donc le premier par P et le second par Q, la dernière équation deviendra

$$10^h\,(10^{n-h} - 1)\, a = b\,(P - Q).$$

d'où on tire l'expression connue

$$\frac{a}{b} = \frac{P - Q}{10^h(10^{n-h} - 1)}$$

Il nous reste encore à examiner quelques particularités de ces quotiens périodiques pour compléter ce que nous avons à dire à ce sujet.

Supposons qu'on ait à réduire $\frac{1}{7}$ en décimales. Écrivons l'opération toute entière. Nous aurons ce qui suit :

10	7
30	
20	0, 142 857 etc.
60	
40	
50	
1	

Ce résultat peut donner lieu aux remarques suivantes :

D'abord la période ayant 6 chiffres, si nous ajoutons le nombre exprimé par la première moitié des chiffres au nombre exprimé par la seconde moitié, ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 142 \\ 857 \\ \hline \text{Somme} \quad 999 \end{array}$$

Nous trouverons que la somme est exprimée par une suite de 9, ou que, par rapport à 9, les chiffres de la première moitié sont les complémens des chiffres correspondans de la seconde.

En second lieu, si on ajoute deux à deux les restes qui ont donné ces chiffres complémentaires, on verra qu'ils font une somme constante, égale au diviseur 7.

Cherchons à découvrir si ces propriétés sont particulières au diviseur 7, ou si elles lui seraient communes avec d'autres nombres.

Pour cela supposons que la fraction périodique soit simple et composée d'un nombre pair de chiffres. Soit $2n$ ce nombre. Alors les formules (A) se modifieront et deviendront :

$$\left.\begin{array}{l} 10\,a = bq + a_1 \\ 10\,a_1 = bq_1 + a_2 \\ 10\,a_2 = bq_2 + a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 10\,a_{n-1} = bq_{n-1} + a_n \end{array}\right\} \quad (F)$$

$$
\left.\begin{aligned}
10\ a_n &= bq_n + a_{n+1} \\
10\ a_{n+1} &= bq_{n+1} + a_{n+2} \\
10\ a_{n+2} &= bq_{n+2} + a_{n+3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
10\ a_{2n-1} &= bq_{2n-1} + a.
\end{aligned}\right\} \quad (F)
$$

Ajoutons la première de ces équations avec la $n+1^e$; la seconde avec la $n+2^e$, et ainsi de suite. Nous aurons les équations suivantes :

$$
\left.\begin{aligned}
10\ (a + a_n) &= b\ (q + q_n) + a_1 + a_{n+1} \\
10\ (a_1 + a_{n+1}) &= b\ (q_1 + q_{n+1}) + a_2 + a_{n+2} \\
10\ (a_2 + a_{n+2}) &= b\ (q_2 + q_{n+2}) + a_3 + a_{n+3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
10\ (a_{n-1} + a_{2n-1}) &= b\ (q_{n-1} + q_{2n-1}) + a_n + a.
\end{aligned}\right\} \quad (G)
$$

Multiplions ces équations respectivement par 10_{n-1}, 10_{n-2} ... 10_1 et 1, et ajoutons les résultats. Après avoir simplifié nous aurons :

$$
10^n (a + a_n) = b \left\{ 10^{n-1} (q + q_n) + 10_{n-2} (q_1 + q_{n+1}) \ \cdots + 10\ (q_{n-2} + q_{2n-2}) + q_{n-1} + q_{2n-1} \right\} + a + a_n
$$

Et, faisant passer le dernier terme $a + a_n$ dans le premier nombre, il viendra :

$$
(10^n - 1)\ (a + a_n) = b \left\{ 10_{n-1} (q + q_n) + 10_{n-2} (q_1 + q_{n+1}) \ \cdots + 10\ (q_{n-2} + q_{2n-2}) + q_{n-1} + q_{2n-1} \right\} \quad (H)
$$

Si b est un nombre premier, puisque la période a $2n$ chiffres, 10^{2n} est la plus petite puissance de 10 qui, diminuée d'une unité, soit divisible par b. Donc b est premier avec $10^n - 1$. Donc b, qui divise le second nombre de (H), doit diviser $a + a_n$. Mais chacun des nombres a et a_n est plus petit que b. Donc $a + a_n = b$. Donc, à cause des équations (G), l'on aura de même :

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 + a_{n+1} &= b \\
a_2 + a_{n+2} &= b \\
a_3 + a_{n+3} &= b \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_{n-1} + a_{2n-1} &= b.
\end{aligned}\right\} \quad (I)
$$

Mais alors ces mêmes équations (G), divisées par b, deviennent

$$\begin{aligned} 10 &= q + q_n + 1 \\ 10 &= q_1 + q_{n+1} + 1 \\ 10 &= q_2 + q_{n+2} + 1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 10 &= q_{n-1} + q_{2n-1} + 1 \end{aligned}$$

D'où on tire :

$$\begin{aligned} 9 &= q + q_n \\ 9 &= q_1 + q_{n+1} \\ 9 &= q_2 + q_{n+2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ 9 &= q_{n-1} + q_{2n-1} \end{aligned} \qquad (K)$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que b était un nombre premier absolu. Si b était seulement un nombre premier avec $10^n - 1$, les mêmes conséquences auraient encore lieu.

Mais si b n'étant pas premier avait des facteurs communs avec $10^n - 1$, alors soit b' le nombre qu'on obtient après avoir divisé b par le plus grand diviseur commun qui existe entre ce nombre et $10^n - 1$, et soit d ce diviseur. L'équation (H) fait connaître que b' doit diviser $a + a_n$. Donc, en nommant k le quotient, l'on aura

$$a + a_n = b' k.$$

Et la première des équations (G) deviendra

$$10\, b' k = b' d\, (q + q_n) + a_1 + a_{n+1}$$

On en tire cette conséquence que $a_1 + a_{n+1}$ est divisible aussi par b'. Nommant k_1 le quotient, l'on aura $a_1 + a_{n+1} = b' k_1$. On prouverait de même, au moyen des équations (G), que $a_2 + a_{n+2} = b' k_2$, et ainsi de suite. Donc, ces équations peuvent s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} 10\, k &= d\, (q + q_n) + k_1 \\ 10\, k_1 &= d\, (q_1 + q_{n+1}) + k_2 \\ 10\, k_2 &= d\, (q_2 + q_{n+2}) + k_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 10\, k_{n-1} &= d\, (q_{n-1} + q_{2n-1}) + k. \end{aligned} \qquad (L)$$

On en tire celles-ci :

$$\frac{10\,k\;-k_1}{d} = q_1 + q_n$$

$$\frac{10\,k_1\;-k_2}{d} = q_1 + q_{n-1}$$

$$\frac{10\,k_2\;-k_3}{d} = q_2 + q_{n-2} \qquad \text{(M)}$$

....

....

$$\frac{10\,k_{n-1}-k}{d} = q_{n-1} + q_{2n-1}$$

Ces dernières équations sont autant de conditions particulières auxquelles les sommes partielles de quotiens devront satisfaire, et indiquent en même temps la règle générale à suivre pour les obtenir.

On peut encore étendre et généraliser ces résultats. En effet soit 10^t la plus petite puissance de 10 qui, divisée par b, donne le reste 1. Alors la période aura t chiffres. Soit $t = mn$. Concevons les équations que nous avons nommés (A) décomposées en groupes de m équations chacun. Alors le nombre des groupes sera n. Faisons la somme de toutes les équations qui occupent le même rang dans ces différens groupes, et le nombre de ces sommes sera m. Ces m équations seront les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
10\,(a + a_m + a_{2m} + a_{3m}\;\ldots\; + a_{(n-1)m}) = b(q + q_m + q_{2m} + q_{3m}\;\ldots\; + q_{(n-1)m}) \\
\qquad + a_1 + a_{m+1} + a_{2m+1} + a_{3m+1}\;\ldots\; + a_{(n-1)m+1} \\
10\,(a_1 + a_{m+1} + a_{2m+1} + a_{3m+1}\;\ldots\; + a_{(n-1)m+1}) = b\,(q_1 + q_{m+1} + q_{3m+1}\;\ldots\; + q_{(n-1)m+1}) \\
\qquad + a_2 + a_{m+2} + a_{2m+2} + a_{3m+2}\;\ldots\; + a_{(n-1)m+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
10\,(a_{m-1} + a_{2m-1} + a_{3m-1} + a_{4m-1}\;\ldots\; + a_{mn-1}) = b\,(q_{m-1} + q_{m-2}\;\ldots\; + q_{mn-1}) \\
\qquad + a_m + a_{2m} + a_{3m}\;\ldots\; + a_{(n-1)m} + a
\end{array}\right\}\text{(N)}$$

Multiplions ces équations respectivement par 10^{m-1}, 10^{m-2} ... 10 et 1. Ajoutons les résultats et réduisons. Tous les termes du second membre de l'équation résultante seront, à l'exception du dernier, des multiples de b dont nous pourrons représenter la somme par $b\,S$, et le dernier terme sera $a_m + a_{2m} + a_{3m}\;\ldots\; + a_{(n-1)m} + a$. Faisons passer ce dernier terme dans le premier membre, nous aurons l'équation.

$$(10^m - 1)\;(a + a_m + a_{2m} + a_{3m}\;\ldots\; + a_{(u-1)m}) = b\,S \qquad \text{(P)}$$

Donc, si b est premier avec $(10^m - 1)$, il divisera la somme

$$a + a_m + a_{2m} + a_{3m} \dots + a_{(n-1)m}$$

Mais alors la première des équations (N) montre qu'il divisera aussi la somme

$$a_1 + a_{m+1} + a_{2m+1} + a_{3m+1} \dots + a_{(n-1)m+1}$$

et l'on prouvera de même qu'il divisera toutes celles qui multiplient le nombre 10 dans les premiers membres des équations (N). Donc si on désigne par K, K_1, K_2, etc., les quotiens qu'on obtient en divisant ces sommes par b et par Q, Q_1, Q_2, etc., les sommes qui multiplient b dans les seconds membres des équations (N); celles-ci, après avoir été divisées par b, deviendront :

$$\left.\begin{aligned} 10\,K &= Q + K_1 \\ 10\,K_1 &= Q_1 + K_2 \\ 10\,K_2 &= Q_2 + K_3 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ 10\,K_{m-1} &= Q_{m-1} + K. \end{aligned}\right\} \quad (Q)$$

On en déduira celles qui suivent :

$$\left.\begin{aligned} 10\,K - K_1 &= Q \\ 10\,K_1 - K_2 &= Q_1 \\ 10\,K_2 - K_3 &= Q_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ 10\,K_{m-1} - K &= Q_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad (R)$$

Si b n'était pas premier avec $10^m - 1$, alors soit d le plus grand diviseur commun de ces deux nombres, et faisons $b = d\,b'$. Il est facile de voir que b' sera diviseur exact des sommes précédentes, et en désignant toujours les quotiens par K, K_1, K_2, etc., les équations (R) se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \frac{10\,K - K_1}{d} &= Q \\ \frac{10\,K_1 - K_2}{d} &= Q_1 \\ \frac{10\,K_2 - K_3}{d} &= Q_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{10\,K_{m-1} - K}{d} &= Q_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

Vérifions ces principes par quelques applications particulières, et proposons-nous d'abord de réduire la fraction $\frac{1}{133}$ en décimales. Ici $a = 1$. $b = 133 = 19 \cdot 7$. Or, 10^{18} et 10^{6} sont les plus petites puissances de 10 qui, divisées respectivement par 19 et 7, donnent le reste 1 ; et comme le plus petit multiple commun de 18 et de 6 est 18 lui-même, il s'ensuit que 10^{18} sera encore la plus petite puissance de 10 qui, divisée par 133, donnera le reste 1, et par conséquent que la fraction périodique cherchée doit avoir 18 chiffres. De plus, comme 10^{9} n'est pas une puissance de 10^{6}, $10^{9} - 1$ ne saurait être divisible par 7, et puisque d'ailleurs 10^{18} est la plus petite puissance de 10 qui, diminuée de 1, soit divisible par 19, concluons de là que $10^{9} - 1$, est premier avec le diviseur 133. Donc, la période sera composée de deux parties complémentaires et 133 divisera les sommes successives $a + a_n$, $a_1 + a_{n+1}$, etc., et par conséquent sera égale à chacune d'elles. Et en effet, en effectuant les opérations on est conduit aux résultats indiqués dans le tableau suivant :

Ordre......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Quotiens...	0	0	7	5	1	8	7	9	6	9	9	2	4	8	1	2	0	3
Restes.....	10	100	69	25	117	106	129	93	132	123	33	64	108	16	27	4	40	1

Ainsi la fraction $\frac{1}{133} = 0{,}007518796992481203$ etc.

Les deux parties de la période $\begin{array}{r}007518796\\ \underline{992481203}\\ 999999999\end{array}$ ajoutées ensemble font 99999999, ou sont complémentaires l'une de l'autre. De plus si on ajoute les restes du rang marqué par 0 et 9 ; 1 et 10 ; 2 et 11 et ainsi de suite, les sommes seront toutes égales à 133, comme on peut le voir par le tableau suivant :

1	10	100	69	25	117	106	129	93
132	123	33	64	108	16	27	4	40
133	133	133	133	133	133	133	133	133

Prenons pour second exemple la fraction $\frac{1}{403}$. Alors a est encore égal à 1 et l'on a $b = 403 = 31 \times 13$. Or, 10^{15} et 10^{6} sont les plus petites puissances de 10 qui, divisées par 31 et 13, donnent le reste 1. Le plus petit multiple commun des deux nombres 15 et 6 est 30. D'où il suit que $10^{30} - 1$ sera divisible à la fois par 31 et par 13 ; ou que la période aura 30 chiffres. Néanmoins, elle ne sera point composée de deux parties complémentaires, parce que $10^{15} - 1$ est divisible par 31. En effet, en effectuant les opérations, on trouvera les résultats indiqués par le tableau suivant :

Ordre......	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quotiens...	0	0	2	4	8	1	3	8	9	5	7	8	1	6	3
Restes.....	10	100	194	328	56	157	361	386	233	315	329	66	257	152	311

Ordre......	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Quotiens...	7	7	1	7	1	2	1	5	8	8	0	8	9	3	3
Restes.....	289	69	287	49	87	64	237	355	326	36	360	376	133	121	1

Concevons les équations (A) décomposées en 10 groupes. Chacun d'eux comprendra 3 équations. Les équations (N) seront aussi au nombre de 3. Les sommes $a + a_m +$ etc., $a_1 + a_{m+1} +$ etc., que je désignerai toutes pour abréger par S (a), seront composées chacune de 10 termes et, comme le produit 31×13 est premier avec $10^3 - 1$, ces S (a) seront toutes divisibles par 403. En jetant les yeux sur le tableau ci-dessous, on reconnaîtra qu'elles donnent toutes le même quotient 5.

1re SOMME.		2me SOMME.		3me SOMME.	
Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.
0	1	1	11	2	100
3	194	4	328	5	56
6	157	7	361	8	386
9	233	10	315	11	329
12	66	13	257	14	152
15	311	16	289	17	69
18	287	19	49	20	87
21	64	22	237	23	355
24	326	25	36	26	360
27	376	28	133	29	121
Somme.	2015	Somme.	2015	Somme.	2015
Diviseur.	403	Diviseur.	403	Diviseur.	403
Quotient.	5	Quotient.	5	Quotient.	5

Alors les équations (R) se réduiront toutes à celle-ci :

$$10 \cdot 5 - 5 = Q.$$

Donc, $Q = Q_1 = Q_2 = 45$, ce qui est en effet vérifié par le tableau suivant :

Rang.	Quotient.	Rang.	Quotient.	Rang.	Quotient.
1	0	2	0	3	2
4	4	5	8	6	1
7	3	8	8	9	9
10	5	11	7	12	8
13	1	14	6	15	3
16	7	17	7	18	1
19	7	20	1	21	2
22	1	23	5	24	8
25	8	26	0	27	8
28	9	29	3	30	3
Somme.	45	Somme.	45	Somme.	45

Décomposons maintenant les équations (A) en six groupes : chacun d'eux comprendra 5 équations. Les équations (N) seront donc aussi au nombre de 5. Alors $10^5 - 1$ sera premier avec 31×13 et les S (a), composées chacune de 6 termes, seront encore divisibles par 403. Les résultats sont renfermés dans le tableau suivant :

1re somme.		2me somme.		3me somme.		4me somme.		5me somme.	
Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.
0	1	1	10	2	100	3	194	4	328
5	56	6	157	7	361	8	386	9	233
10	315	11	329	12	66	13	257	14	152
15	311	16	289	17	69	18	287	19	49
20	87	21	64	22	237	23	355	24	326
25	36	26	360	27	376	28	133	29	121
Somme.	806	Somme.	1209	Somme.	1209	Somme.	1612	Somme.	1209
Diviseur	403	Diviseur	403	Diviseur	403	Diviseur	403	Diviseur	403
Quotient	2	Quotient	9	Quotient	3	Quotient	4	Quotient	3

Les équations (R) deviennent :

$$10 \cdot 2 - 3 = Q$$
$$10 \cdot 3 - 3 = Q_1$$
$$10 \cdot 3 - 4 = Q_2$$
$$10 \cdot 4 - 3 = Q_3$$
$$10 \cdot 3 - 2 = Q_4$$

d'où il suit que :

$$Q = 17$$
$$Q_1 = 27$$
$$Q_2 = 26$$
$$Q_3 = 37$$
$$Q_4 = 28.$$

Ce qui se trouve en effet vérifié par le tableau suivant :

Rang.	Quotient	Rang.	Quotient	Rang.	Quotient	Rang.	Quotient	Rang.	Quotient
1	0	2	0	3	2	4	4	5	8
6	1	7	3	8	8	9	9	10	5
11	7	12	8	13	1	14	6	15	3
16	7	17	7	18	1	19	7	20	1
21	2	22	1	28	5	24	8	25	8
26	0	27	8	28	9	29	3	30	3
Somme.	17	Somme.	27	Somme.	26	Somme.	37	Somme.	28

Enfin, décomposant ces mêmes équations (A) en 5 groupes, comprenant chacun 6 équations, les équations (N) seront aussi au nombre de 6. Mais $10^6 - 1$ est divisible par 13 et ne l'est pas par $31 \cdot 10^m - 1$ et b ont donc un diviseur commun. D'où il suit que chacune des $S(a)$ sera divisible seulement par 31. Ce qui est en effet vérifié par le tableau suivant :

Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.	Rang.	Reste.
0	1	1	10	2	100	3	194	4	328	5	56
6	157	7	361	8	386	9	233	10	315	11	329
12	66	13	257	14	152	15	311	16	289	17	69
18	287	19	49	20	87	21	64	22	237	23	355
24	326	25	36	26	360	27	376	28	133	29	121
Somm.	837	Somm.	713	Somm.	1085	Somm.	1178	Somm.	1302	Somm.	930
Divis.	31	Divis.	31	Divis.	31	Divis.	31	Divis.	31	Divis.	31
Quot.	27	Quot.	23	Quot.	35	Quot.	38	Quot.	42	Quot.	30

Alors les équations (S) deviennent :

$$\frac{10 \cdot 27 - 23}{13} = Q$$
$$\frac{10 \cdot 23 - 35}{13} = Q_1$$
$$\frac{10 \cdot 35 - 38}{13} = Q_2$$
$$\frac{10 \cdot 38 - 42}{13} = Q_3$$
$$\frac{10 \cdot 42 - 30}{13} = Q_4$$
$$\frac{10 \cdot 30 - 27}{13} = Q_5$$

Elles donnent :

$$Q = 19$$
$$Q_1 = 15$$
$$Q_2 = 24$$
$$Q_3 = 26$$
$$Q_4 = 30$$
$$Q_5 = 21.$$

Ce qui est en effet vérifié par le tableau suivant :

Rang.	Quot.	Rang.	Quot.	Rang.	Quot.	Rang.	Quot.	Rang.	Quot.	Rang.	Quot.
1	0	2	0	3	2	4	4	5	8	6	1
7	3	8	8	9	9	10	5	11	7	12	8
13	1	14	6	15	3	16	7	17	7	18	1
19	7	20	1	21	2	22	1	23	5	24	8
25	8	26	0	27	8	28	9	29	3	30	3
Somm.	19	Somm.	15	Somm.	24	Somm.	26	Somm.	30	Somm.	21

Ces exemples suffiront pour montrer l'exactitude de nos formules, et nous bornerons là ces applications.

